概率论与数理统计（二）
2017 年 10 月真题及答案解析

单项选择题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

1. 设随机事件$B\subset A$，且$P(A)=0.3$，$P(B)=0.2$，则$P(A-B)=$

A. 0.1

B. 0.2

C. 0.3

D. 0.5

答案：A

解析：

$B\subset A\Rightarrow AB=B$ ，$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)=0.1$

选 A.

2. 盒中有 7 个球，编号为 1 至 7 号，随机取 2 个，取出球的最小号码是 3 的概率为（）

A. 2/21

B. 3/21

C. 4/21

D. 5/21

答案：C

解析：本题为古典概型，所求概率为，$\dfrac{C_4^1}{C_7^2}=\dfrac{4}{21}$ 选 C。

3. 设随机变量$X\sim N(-2,\ 3^2)$，则$P\{X=3\}=$（）

A. 0

B. 0.25

C. 0.5

D. 1

答案：A

解析：因为 是连续型随机变量，所以$P\{X=3\}=0$

4. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	1
P	0.3	0.7

，$Y\sim B(3,\ 0.5)$ 且 X 与 Y 相互独立，则（）

A. 0.0375

B. 0.3

C. 0.5

D. 0.7

答案：A

解析：因为 X 与 Y 相互独立，所以

$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=0.3\times(0.5)^3=0.0375$.

5. 设随机变量 X 服从参数为 5 的指数分布，则 $E(-3X+2)$ =（）

A. A.-15

B. B.-13

C. C. $-\frac{3}{5}$

D. D. $\frac{7}{5}$

答案：D

解析：X 服从参数为 5 的指数分布，

$\therefore E(X)=\frac{1}{5}$，$E(-3X+2)=-3E(X)+2=\frac{7}{5}$，选 D

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X~B(16,0.5)，Y 服从参数为 9 的泊松分布，则 D(X－2Y+1)=（）

A. 13

B. 14

C. 40

D. 41

答案：C

解析：$D(X-2Y+1)=D(X)+4D(Y)=16\times0.5\times0.5+4\times9=40$，选 C。

7. 设 X1，X2，…，X50 相互独立，且 $X_i=\begin{cases}0, & 事件A不发生,\\ 1, & 事件A发生,\end{cases}(i=1,2,\cdots,50)$，$P(A)=0.8$，令为标准正态分布函数，则由中心极限定理知 Y 的分布函数近似等于（）

A. A. $\Phi(y-40)$

B. B. $\Phi(y+40)$

C. C. $\Phi(\frac{y-40}{\sqrt{8}})$

D. D. $\Phi(\frac{y-40}{8})$

答案：C

解析：由中心极限定理，

$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{50}X_i\right)=50E(X)=40$，

$D(Y)=D\left(\sum_{i=1}^{50}X_i\right)=50D(X)=50P(A)[1-P(A)]=8$，所以 Y 近似服从 $N(40,8)$，

Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}\approx\Phi(\frac{y-40}{\sqrt{8}})$。选 C

8. 设总体 $X\sim N(0,1)$，x_1,x_2,x_3 为来自 X 的样本，则下列结论正确的是（）

A. A. $x_1+x_2\sim N(0,2^2)$

B. B. $x_1^2+x_2^2+x_3^2\sim\chi^2(3)$

C. C. $x_1+x_2+x_3\sim N(0,3^2)$

D. D. $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2\sim\chi^2(6)$

答案：B

解析：因为 为 x_i 来自总体的简单随机样本，所以

9. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $(\theta>0)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 x 的样本，为样本均值，则未知参数θ的无偏估计为（）

A. A. $\frac{n}{\bar{x}}$

B. B. $\frac{\bar{x}}{n}$

C. C. $\frac{1}{\bar{x}}$

D. D. $\bar{x}$

答案：D

解析：由题可知，X 服从参数为 $\frac{1}{\theta}$ 的指数分布，则，故为θ 的无偏估计，选 D

10. 设 x1，x2，…，xn 为来自正态总体 N(μ,32)的样本，$\bar{x}$ 为样本均值．对于检验假设，则采用的检验统计量应为（）

A. A. $\frac{\bar{x}-\mu_0}{3/n}$

B. B. $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{3/\sqrt{n}}$

C. C. $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{3/(n-1)}$

D. D. $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{3/\sqrt{n-1}}$

答案：B

解析：对 检 μ 验，方差 已知，所以检验统计量为，选 B

填空题：本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分。

11. 11. 设 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{7}{12}$，则 $P(\overline{AB})=$________.

答案：

解析：

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{7}{12}=\frac{1}{4}\text{ ,}P(\overline{AB})=1-P(AB)=\frac{3}{4}$$

12. 某射手对目标独立的进行射击，每次命中率均为 0 .5，则在 3 次射击中至少命中 2 次的概率为____

答案：0.5

解析：设 3 次射击中命中次数为 X，

则 $X\sim B(3,0.5)$

$$P\{X\geq 2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=C_3^2\cdot(0.5)^2\cdot(0.5)+(0.5)^3=0.5$$

13. 设随机变量 X 服从区间[0,3]上的均匀分布，x 的概率密度为 f(x)，则 f(3)－f(0)=.

答案：0

解析：

$X \sim U(0,3)$，X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$，所以 $f(3)-f(0)=0$

14. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

，F(x)是 X2 的分布函数，则 F(0)=_______.

答案：

解析：$$F(0)=P\{X^2\le 0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{2}$$

15. 设随机变量 X 的分布函数为 则 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}$ 则 $P\{1<X<3\}=$_______.

答案：0.7

解析：$$P\{1<X<3\}=F(3-0)-F(1)=\lim_{x\to 3^-}F(x)-F(1)=1-0.3=0.7$$

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X~N(0,l)，Y~N(1,2)，记 Z＝2X－Y，则 Z~ .

答案：

解析：
$$E(Z)=E(2X-Y)=2E(X)-E(Y)=-1,$$
$$D(Z)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)=6$$
$$\therefore Z\sim N(-1,6)$$

17. 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1
0	0.2	0.3
1	0.4	0.1

则 P{XY=0}=______.

答案：0.9

解析：$P\{XY=0\}=1-P\{XY\neq 0\}=1-P\{X=1,Y=1\}=1-0.1=0.9$

18. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$ 则

答案：

解析：$P\left\{X+Y<\frac{1}{2}\right\}=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}-x}1dy=\frac{1}{8}$

19. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 E(X2)=_______.

答案：2

解析：X 服从参数为 1 的指数分布，$\therefore E(X)=1$，$D(X)=1$，$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=2$

20. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-0.5$，$U=2X$，$V=\frac{1}{3}Y$，U 与 V 的相关系数 =_______.

答案：-0.5

解析：

$$Cov(U,V)=Cov\left(2X,\frac{1}{3}Y\right)=\frac{2}{3}Cov(X,Y),$$

$$D(U)=D(2X)=4D(X),\quad D(V)=D\left(\frac{1}{3}Y\right)=\frac{1}{9}D(Y)$$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\cdot\sqrt{D(V)}}=\frac{\frac{2}{3}Cov(X,Y)}{\sqrt{4D(X)}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}D(Y)}}=\frac{\frac{2}{3}Cov(X,Y)}{\frac{2}{3}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{DY}}=\rho_{XY}=-0.5$$

21. 在 1000 次投硬币的实验中，X 表示正面朝上的次数，假设正面朝上和反面朝上的概率相同，则由切比雪夫不等式估计概率 $P\{400<X<600\}\geq$________。

答案：

$$\text{由题}X\sim B(1000,0.5)\text{，}E(X)=500\text{，}D(X)=250$$

解析：

$$\text{所以}P\{400<X<600\}=P\{|X-500|<100\}\geq 1-\frac{D(X)}{100^2}=\frac{39}{40}$$

22. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，为样本均值，s2 为样本方差，则 .

答案：

解析：因为总体 X 服从正态分布，所以 $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}=\frac{\bar{x}}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

23. 23.设总体 X 服从区间 $[0,a]$ 上的均匀分布 $(a>0)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，$\bar{x}$ 样本均值，

答案：

解析：

$$X\sim U(0,a)\text{，故}E(X)=\frac{a}{2}\text{，令}E(X)=\bar{x}\text{可得}\frac{a}{2}=\bar{x}\Rightarrow\hat{a}=2\bar{x}$$

24. 24.在假设检验中，H_0 为原假设，已知 $P\{\text{接受}H_0|H_0\text{不成立}\}=0.2$，则犯第二类错误的概率等于________。

答案：0.2

解析：在假设检验中，犯第二类错误的概率为 $P\{\text{接受}H_0\,|\,H_0\text{不成立}\}=0.2$

25. 设 x1,x2,…,x10 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma_0^2)$ 的样本，其中 σ_0^2 已知，$\bar{x}$ 为样本均值，若检验假设则应采用的检验统计量的表达式为_________.

答案：

解析：对 μ 进行检验， 已知，检验统计量为

计算题：本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分

26. 26.设两个随机事件 A,B， $P(A)=0.3$， $P(B)=0.6$.

答案：

解析：

（1）A 与 B 独立，所以 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0.18$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.6-0.18=0.72$

（2）A 与 B 互不相容，$AB=\varnothing \Rightarrow P(AB)=0$

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-(0.3+0.6)=0.1$

27. 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.1	0.3
2	0.2	0.1	0.2

求：（1）(X,Y)关于 Y 的边缘分布律；（2）(X,Y)关于 Y 的边缘分布函数 FY(y).

答案：

解析：（1） (X,Y)的边缘分布律为

Y	1	2	3
P	0.3	0.2	0.5

（2） (X,Y)的边缘分布函数为

综合题：本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分

28. 设随机变量 X 服从参数为 3 的指数分布，令 Y=2X+1.

求：（1）X 的概率密度 $f_X(x)$；（2）Y 的概率密度 $f_Y(y)$；（3）$P\{Y>2\}$.

答案：

解析：

（1）X服从参数为 3 的指数分布，所以 X的概率密度为 $f_x(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$

（2）$y=2x+1$，$x=h(y)=\dfrac{y-1}{2}$，$h'(y)=\dfrac{1}{2}$，由公式法，

Y的概率密度 $f_Y(y)=f_x[h(y)]\cdot\left|[h'(y)]\right|=\begin{cases}\dfrac{3}{2}e^{\frac{3}{2}(1-y)}, & y>1,\\ 0, & y\le 1;\end{cases}$

（3）$P\{Y>2\}=\int_2^{+\infty}\dfrac{3}{2}e^{\frac{3}{2}(1-y)}dy=e^{-\frac{3}{2}}$.

29. 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0	0.2	0
0	0.2	0.2	0.2
1	0	0.2	0

（1）求 X 与 Y 的相关系数；

（2）问 X 与 Y 是否不相关？是否不独立？

答案：

（1）$E(X)=0$，$E(Y)=0$，$E(XY)=0$，

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$，$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$

（2）$\rho_{XY}=0$，故 X 与 Y 不相关

又 $P\{X=-1\}=0.2$，$P\{Y=-1\}=0.2$，$P\{X=-1,Y=-1\}=0$

$P\{X=-1,Y=-1\}\ne P\{X=-1,Y=-1\}$

解析：所以 X 与 Y 不独立

应用题：10 分

30. 某次考试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今随机抽查了 16 名学生的成绩作为样本，并算得样本均值＝75.1，样本标准差 s=8.0，求μ的置信度为 0.95 的置信区间．（

答案：

对 μ 进行估计，σ^2 未知，μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right],$$

由题设 $\alpha=0.05$，$n=16$，$\bar{x}=75.1$，$t_{0.025}(15)=2.13$，$s=8$

可算得，μ 的置信度为 0.95 的置信区间是

解析：

$$\left[75.1-\frac{8.0}{\sqrt{16}}\times 2.13, 75.1+\frac{8.0}{\sqrt{16}}\times 2.13\right]=[70.84,79.36].$$